CONDICIONES QUE DEBE DE SEGUIR LA ELIPSE

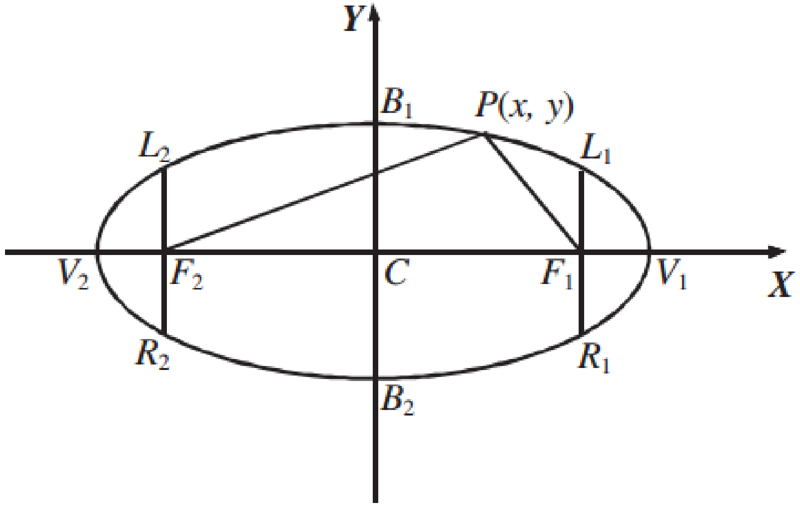
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE AGUASCALIENTES
CENTRO DE EDUCACIÓN MEDIA

DEFINICIÓN DE ELIPSE

Definición

Es el lugar geométrico que describe un punto del plano que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$



C: Centro

V_1 y V_2: Vértices

F_1 y F_2: Focos

B_1 y B_2: Extremos del eje menor

$\overline{V_1V_2} = 2a$ (eje mayor)

$\overline{F_1F_2} = 2c$ (eje focal)

$\overline{B_1B_2} = 2b$ (eje menor)

Condición: $a^2 = b^2 + c^2$; $a > b$, $a > c$

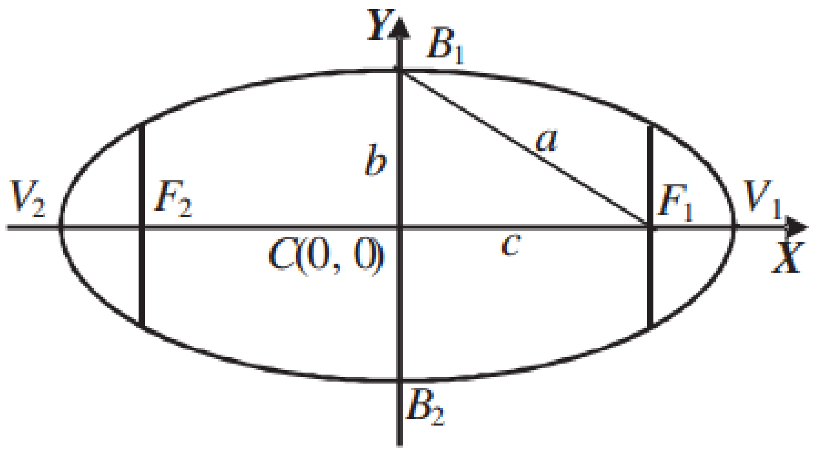
Donde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$\overline{LR} = \dfrac{2b^2}{a}$ (lado recto)

$e = \dfrac{c}{a} < 1$ excentricidad

ECUACIÓN DE UNA ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN

Ecuación de una elipse con centro en el origen



En la figura:

$\overline{CV_1} = \overline{CV_2} = a$

$\overline{CB_1} = \overline{CB_2} = b$

$\overline{CF_1} = \overline{CF_2} = c$

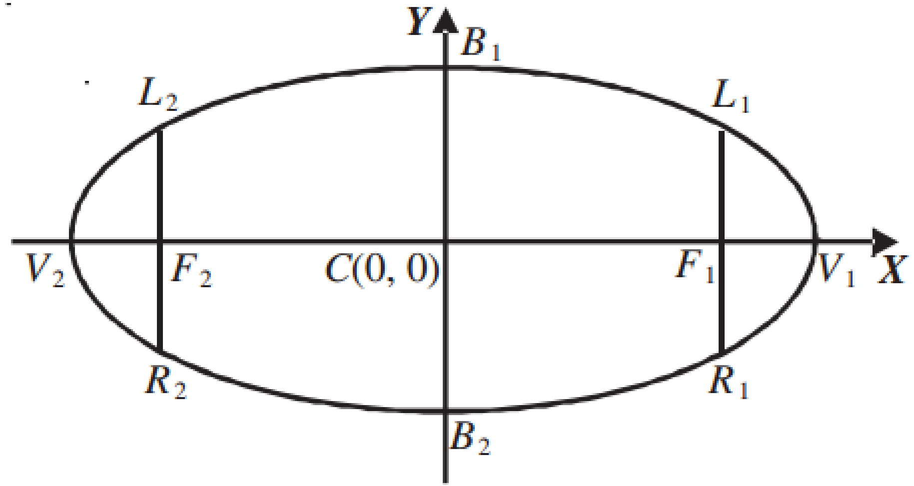
Como $\overline{CV_1} = \overline{CV_2} = a$, entonces $\overline{V_1V_2} = 2a$ y al ser V_1 un punto de la elipse $\overline{V_1F_1} + \overline{V_1F_2} = 2a$, por tanto, la suma de las distancias de cualquier punto de la elipse a los dos puntos fijos (focos) es igual a $2a$; como B_1 es un punto de la elipse, entonces por la definición $\overline{B_1F_1} + \overline{B_1F_2} = 2a$, de donde $\overline{B_1F_1} = a$ y por la gráfica $a^2 = b^2 + c^2$.

ELEMENTOS Y ECUACIÓN

Elementos y ecuación

Elipse horizontal

El eje mayor coincide con el eje X.



Ecuación canónica: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Elementos:

Vértices: $V(\pm a, 0)$

Focos: $F(\pm c, 0)$

Extremos del eje menor: $B(0, \pm b)$

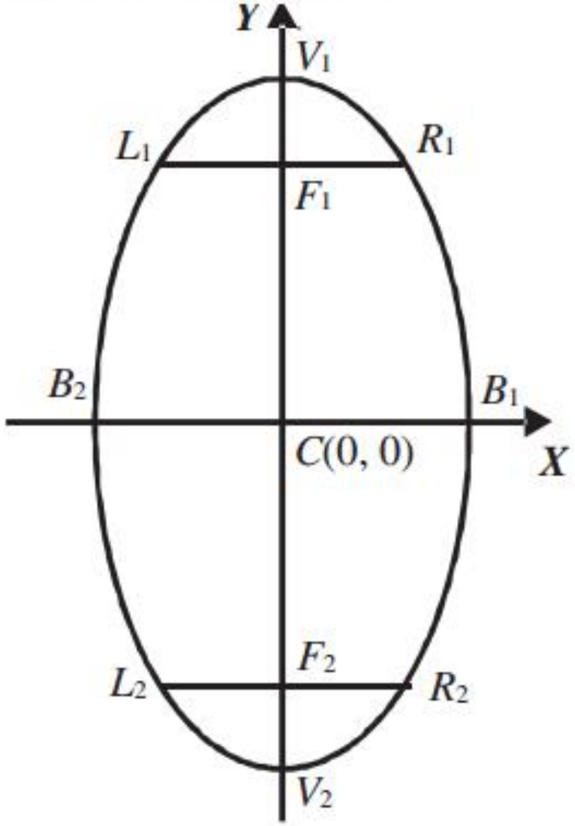
Lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ $(e < 1)$

Condición: $a^2 = b^2 + c^2$; $a > b$, $a > c$ donde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Elipse vertical

El eje mayor coincide con el eje Y.



Ecuación canónica: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

Elementos:

Vértices: $V(0, \pm a)$

Focos: $F(0, \pm c)$

Extremos del eje menor: $B(\pm b, 0)$

Lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ $(e < 1)$

Condición: $a^2 = b^2 + c^2$; $a > b$, $a > c$ donde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Ecuación de una elipse con centro en el punto (h, k)

Para una elipse horizontal con centro fuera del origen en el punto (h, k), se hace una traslación de los ejes XY al punto $C(h, k)$.

Sean $x' = x - h$, $y' = y - k$, la ecuación de la elipse en el nuevo sistema de coordenadas es:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

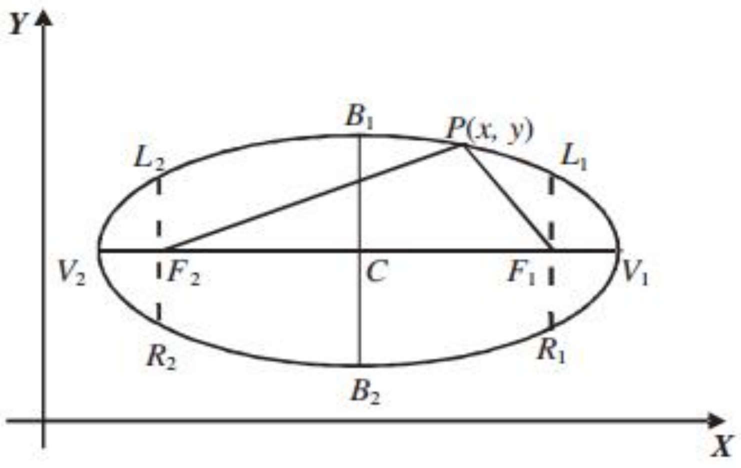
Se sustituyen x', y' en la ecuación y se obtiene:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Del mismo modo se obtiene la ecuación de una elipse vertical con centro (h, k) fuera del origen:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Gráfica



Elementos:

C: Centro

V_1 y V_2: Vértices

F_1 y F_2: Focos

B_1 y B_2: Extremos del eje menor

$\overline{V_1V_2} = 2a$ (eje mayor)

$\overline{F_1F_2} = 2c$ (eje focal)

$\overline{B_1B_2} = 2b$ (eje menor)

Condición: $a^2 = b^2 + c^2$; $a > b$, $a > c$

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a}$ $(e < 1)$

$\overline{LR} = \dfrac{2b^2}{a}$ (lado recto)

Elipse horizontal

Ecuación: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

Elementos:

Vértices: $V(h\pm a,k)$

Focos: $F(h\pm c,k)$

Extremos del eje menor: $B(h,k\pm b)$

Elipse vertical

Ecuación: $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

Elementos:

Vértices: $V(h,k\pm a)$

Focos: $F(h,k\pm c)$

Extremos del eje menor: $B(h\pm b,k)$

Ecuación general de la elipse: $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, con $A\neq C$, y ambas cantidades de igual signo.

CASOS ESPECIALES

Casos especiales

Dada la ecuación general de la elipse $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ con $A \neq C$ pero del mismo signo, N es el identificador que permite conocer la representación geométrica de la ecuación, siendo $N = CD^2 + AE^2 - 4ACF$.

- Si $N > 0$ la ecuación representa una elipse.
- Si $N = 0$ la ecuación representa un punto.
- Si $N < 0$ la ecuación representa un conjunto vacío.

CENTRO DE EDUCACIÓN MEDIA

EJEMPLOS

Ejemplo Nº 1

Encuentre la ecuación de una elipse con vértices V (5,0) y V (-5,0) y focos F (2,0) y F′ (-2,0).

Trace la gráfica.

Solución:

Al ubicar las coordenadas de los vértices y de los focos vemos que estos están en el eje de las **X** por tanto el eje mayor es el eje **X** que también podemos decir que es el eje focal.

De donde tenemos que a = 5 y c = 2 y luego $b^2 = 25 - 4 = 21$ y así $b = \sqrt{21}$

Por tanto la ecuación de la elipse tiene la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

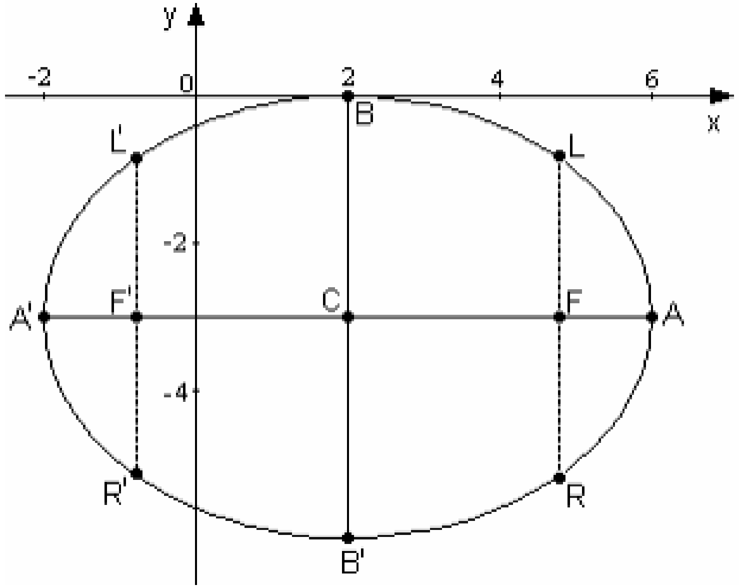
Sustituyendo los valores de a y b tenemos que la ecuación que estamos buscando es

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$$

EJEMPLOS

1) Bosquejar la gráfica de la elipse $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$

<u>Solución</u>



La ecuación dada es de la forma

(I)... $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (elipse horizontal).

Donde a partir del conocimiento de las coordenadas del centro $C(h,k)=(2,-3)$ y de los valores de $a=\sqrt{16}=4$; $b=\sqrt{9}=3$; $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{7}$ podemos obtener todos los elementos de la elipse. Nos concretamos a la obtención de los elementos del primer sector de la elipse y aprovechando su simetría, se obtendrán el resto de sus elementos:

$A(h+a,k)=(6,-3)$; $B(h,k+b)=(2,0)$; $F(h+c,k)=\left(2+\sqrt{7},-3\right)$; $L\left(h+c,k+\frac{b^2}{a}\right)=\left(2+\sqrt{7},-\frac{3}{4}\right)$.

<u>Por simetría</u>: $B'(2,-6)$; $A'(-2,-3)$; $F'\left(2-\sqrt{7},-3\right)$; $R\left(2+\sqrt{7},-\frac{21}{4}\right)$; $L'\left(2-\sqrt{7},-\frac{3}{4}\right)$; $R'\left(2-\sqrt{7},-\frac{21}{4}\right)$; $e=\frac{\sqrt{7}}{4}\approx 0.66$; Ec. eje mayor: $y=-3$; Ec. eje menor: $x=2$